Analyse und Planung von Wasserverteilungsnetzen

03 Grundlagen der Rohrnetzberechnung

Philipp Klingel

Überblick

- Grundlagen der Rohrhydraulik
- Grundlagen der Rohrnetzhydraulik
- Stationäre Rohrnetzberechnung
- Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Fließen und Stürzen

  Unter Fließen wird die Bewegung des Wassers in festen Wandungen verstanden. Für das Fließen wird das **laminare** und **turbulente** sowie das **stationäre** und **instationäre** Fließen unterschieden.

  Das Stürzen ist die Bewegung des Wassers im offenen, luftgefüllten Raum.

- Stationärer und instationärer Fließzustand

  Im stationären Fließzustand sind im Gegensatz zum instationären Fließzustand die Geschwindigkeit im Strömungsfeld zum Betrachtungszeitpunkt an jedem Punkt gleich. Es existieren keine lokalen Beschleunigungen.

Grundlagen der Rohrhydraulik

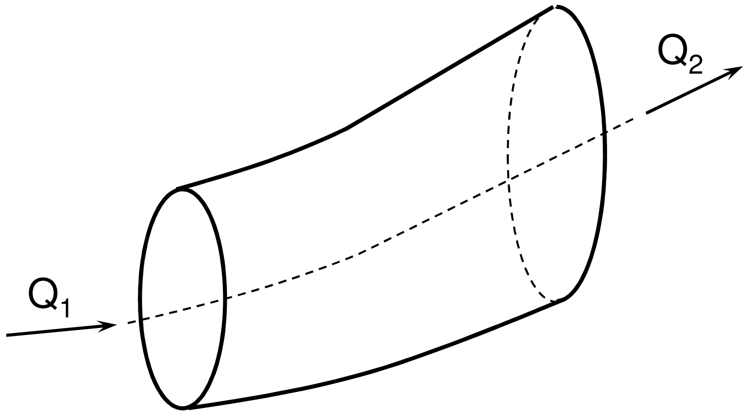
- Massenerhaltung

Im stationären Fließzustand gilt für das mit inkompressiblem Fluid vollgefüllte Rohr nach dem Prinzip der Massenerhaltung die **Kontinuitätsgleichung**:

$$Q_1 = Q_2$$

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Q ... Durchfluss [L³/T]
v ... Fließgeschwindigkeit [L/T]
A ... Querschnittsfläche [L²]



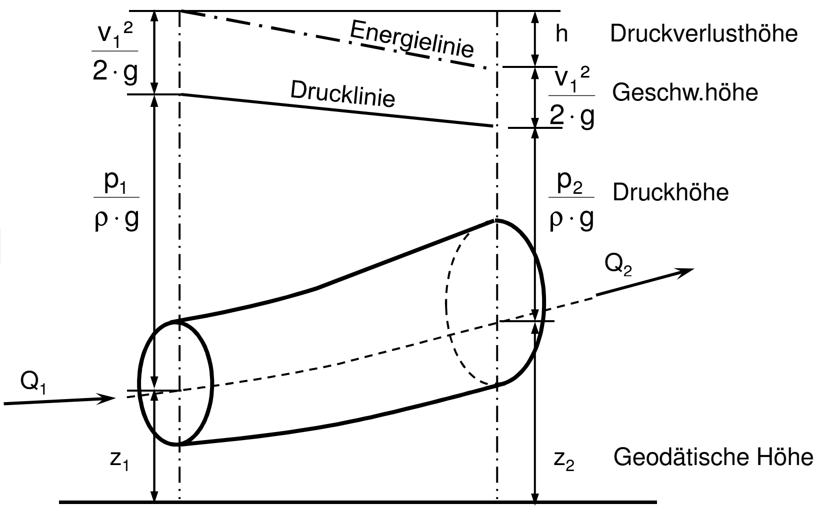
Grundlagen der Rohrhydraulik

- Energieerhaltung

Die Gleichung nach **Bernoulli** besagt, dass für inkompressible Fluide und rotationsfreie Strömungen die Summe der Geschwindigkeitshöhe, der geodätischen Höhe, der Druckhöhe und der Druckverlusthöhe konstant ist:

$$\frac{v^2}{2 \cdot g} + z + \frac{p}{\rho \cdot g} + h = \text{konst.}$$

v ... Geschwindigkeit [L/T]
g ... Erdbeschleunigung [L/T²]
z ... geod. Höhe [L]
p ... Druck [L]
ρ ... Dichte Fluid [M/L³]
h ... Druckhöhenverlust [L]



Grundlagen der Rohrhydraulik

- Kontinuierliche Druckhöhenverluste

Der Durchfluss von Wasser durch ein vollgefülltes Rohr ist mit Energieverlusten in Folge **innerer (Viskosität)** und **äußerer (Rohrwandung) Reibung** verbunden. Das **Widerstandsgesetz** beschreibt die Beziehung zwischen Durchfluss und Druckhöhenverlust allgemein:

$$h = R \cdot Q^e$$

h ... Druckhöhenverlust [L]
R ... Koeffizient für den Rohrreibungswiderstand [-]
Q ... Durchfluss [L^3/T]
e ... Exponent [-]

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Kontinuierliche Druckhöhenverluste

Der Druckhöhenverlust kann mit der Formel nach **Darcy-Weisbach** berechnet werden. Der Reibungsbeiwert hängt dabei vom Strömungszustand (laminar, turbulent) und der relativen Rauheit des Rohres ab.

$$h = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

h ... Druckhöhenverlust [L]
λ ... Reibungsbeiwert [-]
L ... Rohrlänge [L]
D ... Durchmesser/hydr. Radius [L]
v ... Geschwindigkeit [L/T]
g ... Erdbeschleunigung [L/T^2]

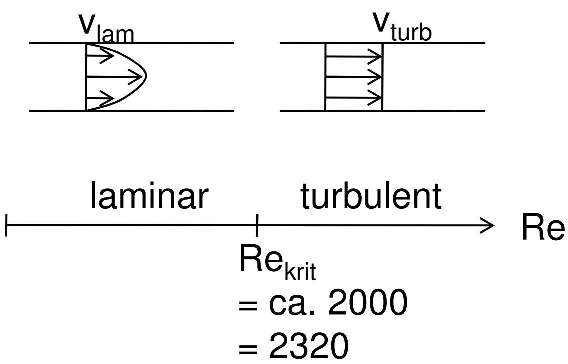
Grundlagen der Rohrhydraulik

- Strömungszustand und Reynoldszahl

  Welcher Strömungszustand (laminar oder turbulent), d.h. welche Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt, vorherrscht, wird durch die **Reynoldszahl** gekennzeichnet.

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

Re ... Reynoldszahl [-]
ν ... Kinematische Viskosität [L^2/T]
v ... Geschwindigkeit [L/T]
D ... Durchmesser [L]



Grundlagen der Rohrhydraulik

- Rauheit und relative Rauheit

  Die Wandungen von Rohrleitungen sind rau. Diese Beschaffenheit wird durch die **Rauheit** beschrieben.

k_s ... Sandrauheit [L]	Korndurchmesser der im Experiment von Nikuradse (1933) aufgetragenen Sandbeschichtung (dichteste Packung)
k ... äquivalente Rauheit [L]	Gleiches Wiederstandsverhalten eines Rohres wie das im Experiment mit Sand beschichtete Rohr (k_s)
k_i ... integrale Rauheit [L]	Berücksichtigung aller den Druckverlust steigernde oder mindernde Einflüsse (> *02 Modellierung*)
k/D ... relative Rauheit [-]	Verhältnis zwischen Rauheit und Durchmesser

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Rauheit
  - Es existieren Tabellenwerke mit Rauheitswerten für Rohrleitungen.
    (> *09 Bemessung*)
  - Die Rauheit wird u.a. von Material, Fluideigenschaften, äußere Einflüsse und Alter beeinflusst.
  - Tabellenwerte besitzen daher nur begrenzte Aussagekraft.
  - Vergleichsmessungen ermöglichen die genaue Ermittlung der (integralen) Rauheit.
    (> *08 Modellkalibrierung*, > *02 Grundlagen der Modellierung*)

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Reibungsbeiwert

  Der Reibungsbeiwert hängt vom Strömungszustand (bestimmt über die Reynoldszahl) und der relativen Rauheit (bestimmt über die Rauheit und den Durchmesser) des Rohres ab.

Strömungszustand	**Bereich**	**Abhängigkeit Reibungsbeiwert**
Re < 2000 (laminar)	-	Re
	hydraulisch glatt	Re (k < viskose Unterschicht)
Re > 2000 (turbulent)	*Übergangsbereich*	Re, k/D
	hydraulisch rau	k/D (k > viskose Unterschicht)

Grundlagen der Rohrhydraulik

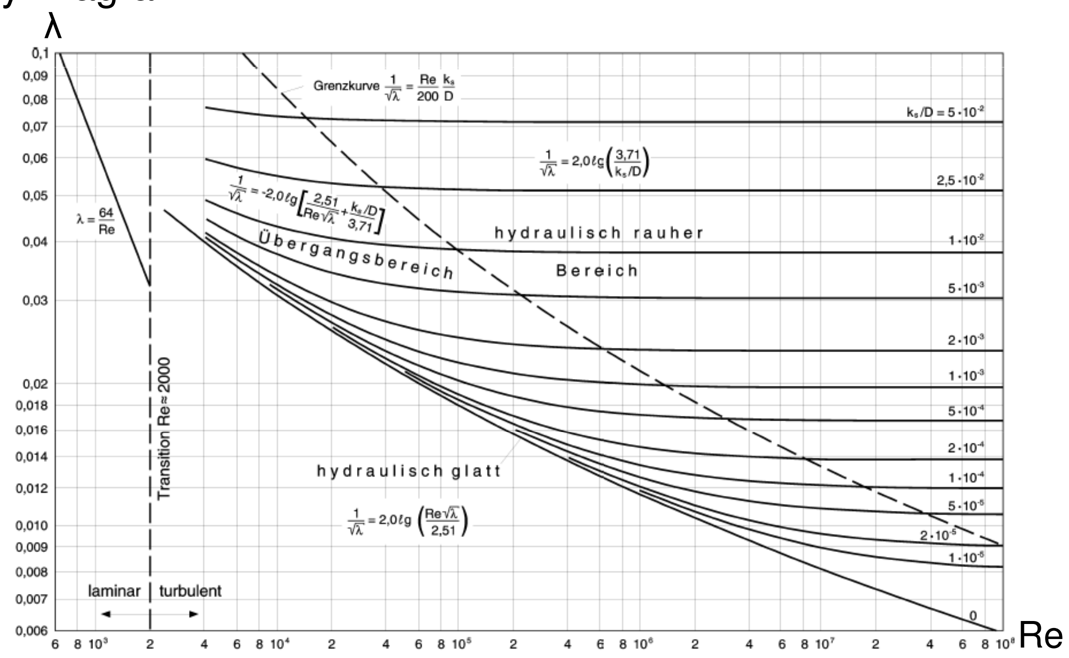
- Reibungsbeiwert

Strömungszustand	Ermittlung Reibungsbeiwert	
Re < 2000 (laminar)	$\lambda = \frac{64}{Re}$	Hagen-Poisseulle
Re > 2000 (turbulent)		
hydraulisch glatt	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg \cdot \frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2{,}51} = 2\lg \cdot \left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0{,}80$	Prandtl-Kármán
Übergangsbereich	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg \cdot \left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{D \cdot 3{,}71}\right)$	Prandtl-Colebrook
hydraulisch rau	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg \cdot \frac{3{,}71 \cdot D}{k} = 1{,}14 - 2\lg \cdot \frac{k}{D}$	Prandtl-Kármán

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Reibungsbeiwert

  Moody-Diagramm



(Lang & Stache, 2009)

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Kontinuierliche Druckhöhenverluste

Der Druckhöhenverlusts kann außerdem mit der empirischen Formel nach **Hazen-Williams** berechnet werden (gebräuchlich in den USA). Der Beiwert C_{HW} kann Tabellenwerken entnommen werden.

$$h = \left(\frac{1}{C_{HW} \cdot \beta}\right)^{1,85} \frac{L \cdot q^{1,85}}{D^{4,87}}$$

$$h = \frac{10,667 \cdot L \cdot q^{1,85}}{C_{HW}^{1,85} \cdot D^{4,87}}$$

h ... Druckhöhenverlust [L]

C_{HW} ... Reibungsbeiwert [-]

L ... Rohrlänge [L]

D ... Durchmesser/hydr. Radius [L]

β ... Umrechnungsfaktor (S.I.: 0,2782; S.A.: 0,4322) [-]

β = 0,2782 (S.I.)

h [m]; D [m]; L [m]; q [m³/s]

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Lokale Druckhöhenverluste

Bei der Durchströmung von Erweiterungen, Verengungen, Krümmern, Verzweigungen, Armaturen usw. wird lokal kinetische Energie verbraucht. Der Koeffizient ζ beschreibt die Form des durchströmten Bauteils und kann Tabellenwerken entnommen werden (> *09 Bemessung*).

$$h_l = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

h ... Lokaler Druckhöhenverlust [L]

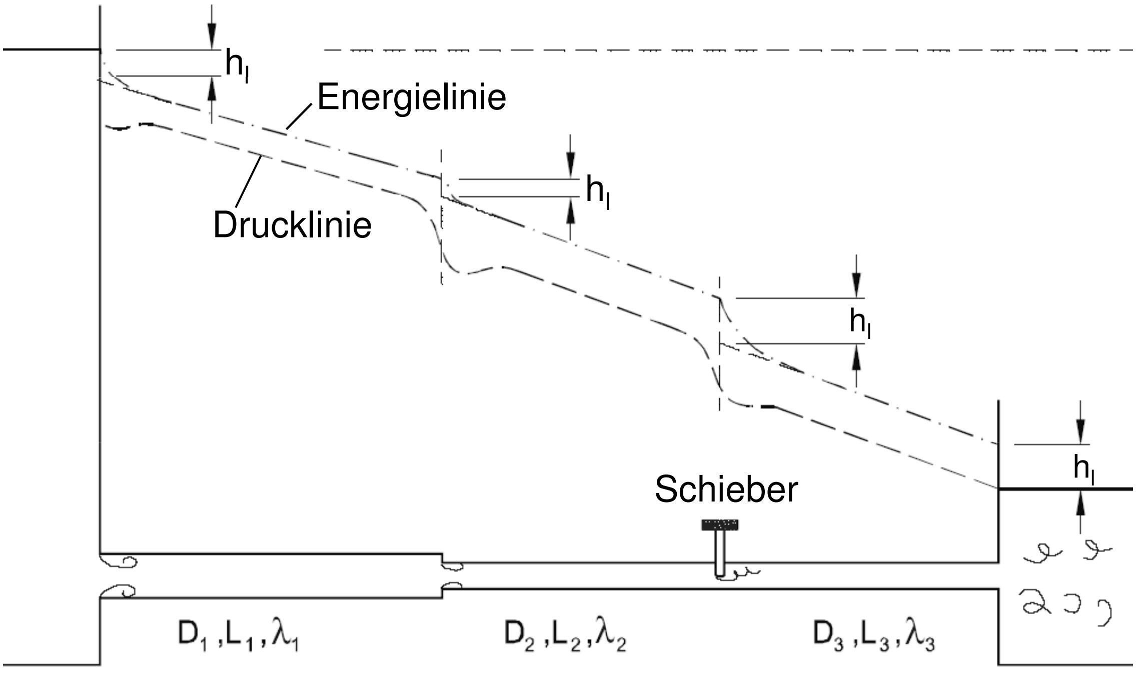
ζ ... Koeffizient für lokalen Wiederstand [-]

v ... Geschwindigkeit [L/T]

g ... Erdbeschleunigung [L/T²]

Grundlagen der Rohrhydraulik

- Lokale und kontinuierliche Druckhöhenverluste



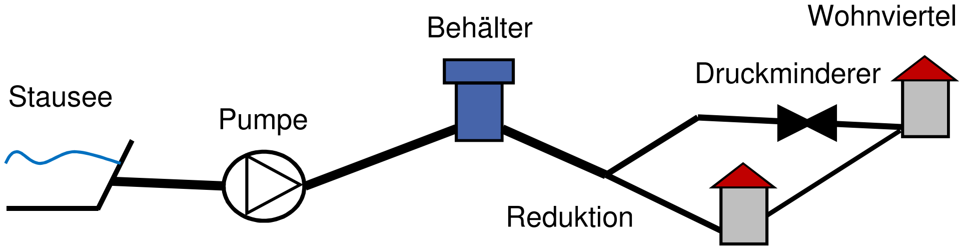
(Jirka, 2009)

Grundlagen der Rohrnetzhydraulik

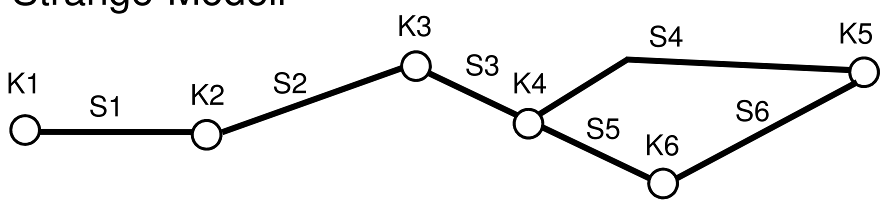
- Abbildung als rechenfähiges Knoten-Stränge-Model

  Das reale Netz wird zur Berechnung des hydraulischen Systemzustands als Knoten-Stränge-Modell abgebildet (> *02 Grundlagen der Modellierung*).

  - Reales Netz (schematisch)



  - Knoten-Stränge-Modell

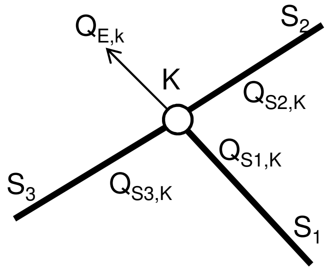


Grundlagen der Rohrnetzhydraulik

- Massenerhaltung

  Analog zur Kontinuitätsgleichung gilt für Rohrnetze das erste Kirchhoffsche Gesetz (**Knotenbedingung**): An jedem Knoten ist die Summe der Zuflüsse gleich der Summe der Abflüsse.

$$\sum_{S}^{n} Q_{S,K} - Q_{E,K} = 0$$



$Q_{S,K}$ ... Zufluss durch den Strang S zum Knoten K [L³/T]

$Q_{E,K}$ ... Entnahme (+) Einspeisung (-) am Knoten K [L³/T]

S ... Strang [-]

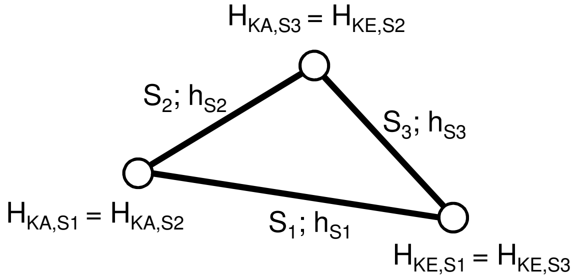
n ... Anzahl der am Knoten K angeschlossenen Stränge S [-]

Grundlagen der Rohrnetzhydraulik

- Energieerhaltung

  Die Potentialdifferenz zwischen zwei Knoten ist für jeden Pfad gleich groß. Für alle Stränge entspricht der Druckhöhenverlust der Potentialdifferenz zwischen Anfangs- & Endknoten (**Kompatibilitätsbedingung**).

$$H_{KA,S} = H_{KE,S} + h_S$$



$H_{KA,S}$ ... Potential des Anfangsknotens des Strangs S [L]

$H_{KE,S}$ ... Potential des Endknotens des Strangs S [L]

h_S ... Druckhöhenverlust im Strange S [L]

$$h_{S2} + h_{S3} = h_{S1}$$

$$H_{KA,S1;2;3} - H_{KE,S1;2;3} = h_{S1;2;3}$$

Grundlagen der Rohrnetzhydraulik

- Energieerhaltung

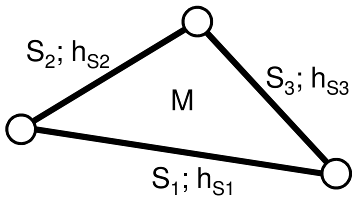
  Für Rohrnetze gilt das zweite Kirchhoffsche Gesetz (**Maschenbedingung**): Die Summe der Druckhöhenverluste in einer Masche bei vorgegebener Richtung sind Null.

$$\sum_{S}^{n} h_{S,M} = 0$$

$h_{S,M}$ ... Druckhöhenverlust im Strange S der Masche M [L]

S ... Strang [-]

n ... Anzahl der Stränge S der Masche M [-]



$$h_{S1} + h_{S2} + h_{S3} = 0$$

Grundlagen der Rohrnetzhydraulik

- Hydraulisches Gleichgewicht

  Aus Widerstandsgesetz, Knotenbedingung (bzw. Kontinuitätsgleichung) und Maschenbedingung (bzw. Kompatibilitätsbedingung) lässt sich das **hydraulische Gleichgewicht** von Rohrnetzen formulieren.

$$h = R \cdot Q^e$$ Widerstandsgesetz

$$\sum_{S}^{n} Q_{S,K} - Q_{E,K} = 0$$ Kontinuitätsgleichung (Knotenbedingung)

$$\sum_{S}^{n} h_{S,M} = 0$$ Kompatibilitätsbedingung (Maschenbedingung)

Grundlagen der Rohrnetzhydraulik

- Hydraulisches Gleichgewicht

Formulierung des hydraulischen Gleichgewichts mit Matrizen und Vektoren:

$$\mathbf{h} = f(\mathbf{q})$$ Widerstandsgesetz

$$\mathbf{A}^T\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$ Kontinuitätsgleichung (Knotenbedingung)

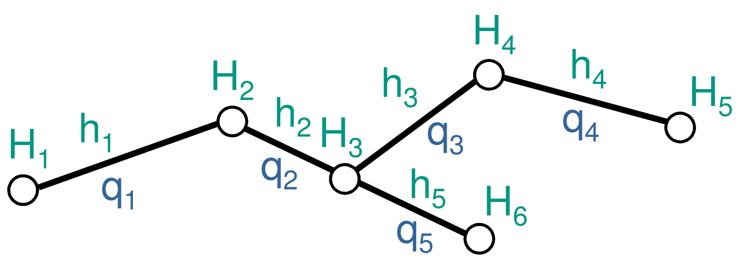
$$\mathbf{h} + \mathbf{AH} = -\mathbf{A}_P\mathbf{H}_P$$ Kompatibilitätsbedingung (Maschenbedingung)

h ... Vektor der Druckhöhenverluste (Stränge)
Q ... Vektor der Wasserentnahmen (Knoten)
q ... Vektor der Durchflüsse (Stränge)
A ... Inzidenzmatrix der Verbrauchsknoten
H ... Vektor der Potentialhöhen an den Verbrauchsknoten
$\mathbf{A}_P$... Inzidenzmatrix der Potentialknoten
$\mathbf{H}_P$... Vektor der Potentialhöhen der Potentialknoten

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Ziel

Bei der stationären Rohrnetzberechnung werden die Durchflüsse und Druckhöhenverluste in den Strängen sowie die Druckhöhen an den Knoten ermittelt. Die gegebenen **Modellparameter** sind dabei **konstant**.



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei verästelten Netzen wird das hydraulische Gleichgewicht ein lineares Gleichungssystem:

$$h = R \cdot Q^e \quad \text{Widerstandsgesetz}$$

$$\sum_S^n Q_{S,K} - Q_{E,K} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

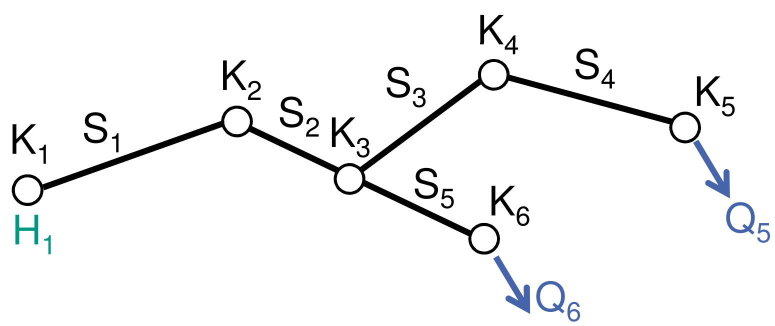
$$\sum_S^n h_{S,M} = 0 \quad \text{Kompatibilitätsbedingung}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei verästelten Netzen wird das hydraulische Gleichgewicht ein lineares Gleichungssystem und lässt sich daher relativ einfach lösen:

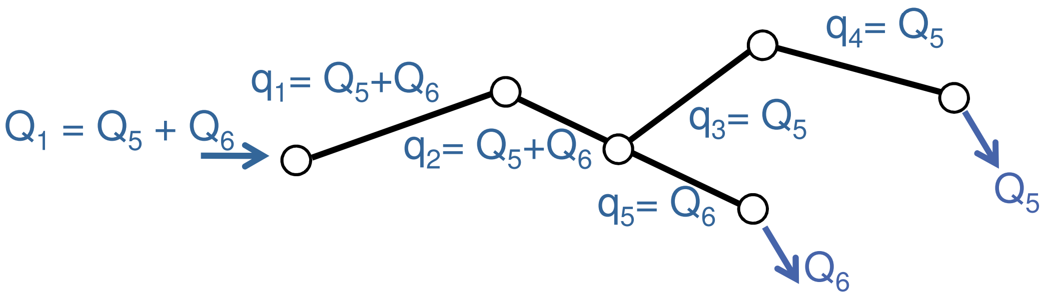
  - Gegeben sind die Entnahmen und Einspeisepotentiale.



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

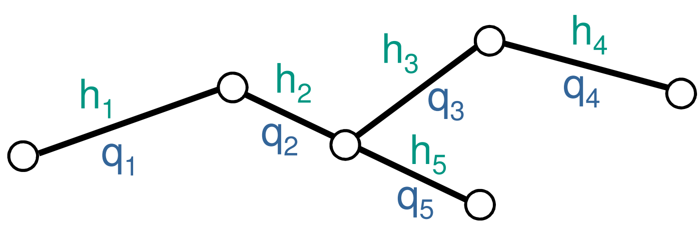
  Bei verästelten Netzen wird das hydraulische Gleichgewicht ein lineares Gleichungssystem und lässt sich daher relativ einfach lösen:
  - Gegeben sind die Entnahmen und Einspeisepotentiale.
  - Die Flussverteilung lässt sich direkt angeben (Massenerhaltung).



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei verästelten Netzen wird das hydraulische Gleichgewicht ein lineares Gleichungssystem und lässt sich daher relativ einfach lösen:
  - Gegeben sind die Entnahmen und Einspeisepotentiale.
  - Die Flussverteilung lässt sich direkt angeben (Massenerhaltung).
  - Aus Flussverteilung und Widerstandsgesetz ergeben sich die Druckhöhenverluste.

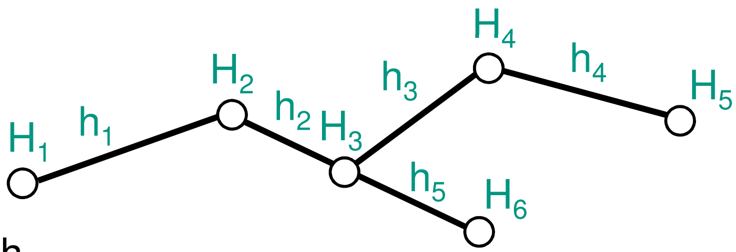


$$h = R \cdot Q^e$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei verästelten Netzen wird das hydraulische Gleichgewicht ein lineares Gleichungssystem und lässt sich daher relativ einfach lösen:
  - Gegeben sind die Entnahmen und Einspeisepotentiale.
  - Die Flussverteilung lässt sich direkt angeben (Massenerhaltung).
  - Aus Flussverteilung und Widerstandsgesetz ergeben sich die Druckhöhenverluste.
  - Ausgehend von den bekannten Potentialhöhen (Einspeiseknoten) und den Druckhöhenverlusten ergeben sich die Potentialhöhen.



$$H_{KA,S} = H_{KE,S} + h_S$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei der Formulierung mit Matrizen und Vektoren wird der Wurzelknoten des Baums als Referenzknoten definiert. Die Inzidenzmatrix **A** ist dadurch quadratisch und nichtsingulär und damit invertierbar ($\mathbf{A}^{-1}$).
  - Die Flussverteilung **q** ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{q} = \mathbf{Q} \qquad \longrightarrow \mathbf{q} = [\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{Q}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei der Formulierung mit Matrizen und Vektoren wird der Wurzelknoten des Baums als Referenzknoten definiert. Die Inzidenzmatrix **A** ist dadurch quadratisch und nichtsingulär und damit invertierbar ($\mathbf{A}^{-1}$).
  - Die Flussverteilung **q** ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung.
  - Die Druckhöhenverluste **h** ergeben sich aus dem Widerstandsgesetz.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{q} = \mathbf{Q} \qquad \longrightarrow \mathbf{q} = [\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{h} = \mathrm{f}(\mathbf{q})$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen

  Bei der Formulierung mit Matrizen und Vektoren wird der Wurzelknoten des Baums als Referenzknoten definiert. Die Inzidenzmatrix **A** ist dadurch quadratisch und nichtsingulär und damit invertierbar ($\mathbf{A}^{-1}$).
  - Die Flussverteilung **q** ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung.
  - Die Druckhöhenverluste **h** ergeben sich aus dem Widerstandsgesetz.
  - Die Potentialhöhen **H** ergeben sich aus der Kompatibilitätsbedingung.

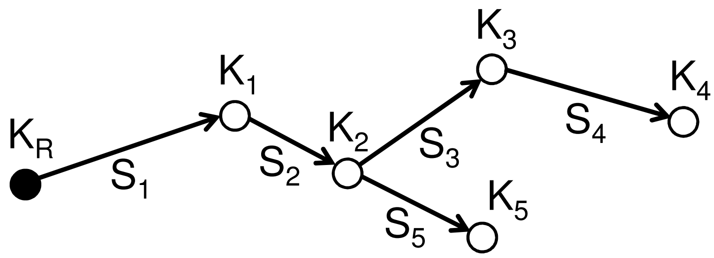
$$\mathbf{A}^T\mathbf{q} = \mathbf{Q} \qquad \longrightarrow \mathbf{q} = [\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{h} = \mathrm{f}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{H} = -\mathbf{A}_P\mathbf{H}_P \longrightarrow \mathbf{H} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_P\mathbf{H}_P + \mathbf{h})$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen - Beispiel
  - Definition des Referenzknotens

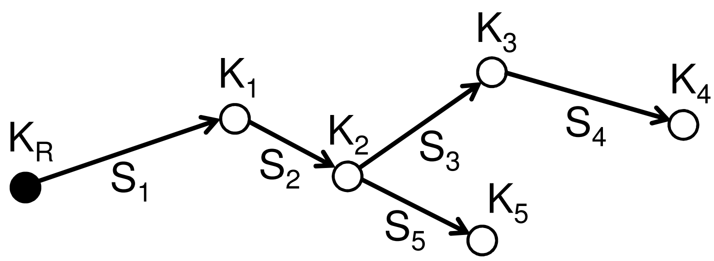


Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen - Beispiel
  - Definition des Referenzknotens.
  - Inzidenzmatrix **A** bzw. transponierte Inzidenzmatrix $\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \textit{Knoten} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \textit{Stränge}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{array}{c} \textit{Stränge} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \textit{Knoten}$$



Stationäre Rohrnetzberechnung

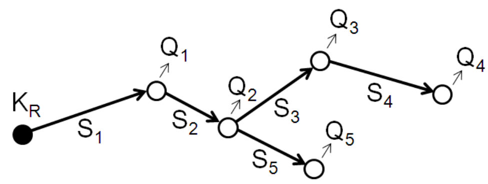
- Berechnung von verästelten Rohrnetzen - Beispiel
  - Definition des Referenzknotens
  - Inzidenzmatrix **A** bzw. transponierte Inzidenzmatrix $\mathbf{A}^T$
  - Inverse der transponierten Inzidenzmatrix $[\mathbf{A}^T]^{-1}$ (Excel, Gauß-Jordan)

$$\mathbf{A}^T \cdot [\mathbf{A}^T]^{-1} = \mathbf{E}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen - Beispiel
  - Definition des Referenzknotens
  - Inzidenzmatrix **A** bzw. transponierte Inzidenzmatrix $\mathbf{A}^T$
  - Inverse der transponierten Inzidenzmatrix $[\mathbf{A}^T]^{-1}$ (Excel, Gauß-Jordan)
  - Die Flussverteilung **q**



$$\mathbf{q} = [\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 \\ Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 \\ Q_3 + Q_4 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

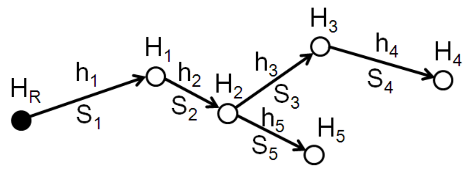
- Berechnung von verästelten Rohrnetzen - Beispiel
  - Definition des Referenzknotens
  - Inzidenzmatrix **A** bzw. transponierte Inzidenzmatrix $\mathbf{A}^T$
  - Inverse der transponierten Inzidenzmatrix $[\mathbf{A}^T]^{-1}$ (Excel, Gauß-Jordan)
  - Die Flussverteilung **q**
  - Die Druckhöhenverluste **h**

$$\mathbf{h} = f(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von verästelten Rohrnetzen - Beispiel
  - Definition des Referenzknotens
  - Inzidenzmatrix **A** bzw. transponierte Inzidenzmatrix $\mathbf{A}^T$
  - Inverse der transponierten Inzidenzmatrix $[\mathbf{A}^T]^{-1}$ (Excel, Gauß-Jordan)
  - Die Flussverteilung **q**
  - Die Druckhöhenverluste **h**
  - Die Potentialhöhen **H**



$$\mathbf{H} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_P \mathbf{H}_P + \mathbf{h})$$

$$\mathbf{H} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot H_R + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} \right\} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} H_R - h_1 \\ H_R - h_1 - h_2 \\ H_R - h_1 - h_2 - h_3 \\ H_R - h_1 - h_2 - h_3 - h_4 \\ H_R - h_1 - h_2 - h_5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array}$$

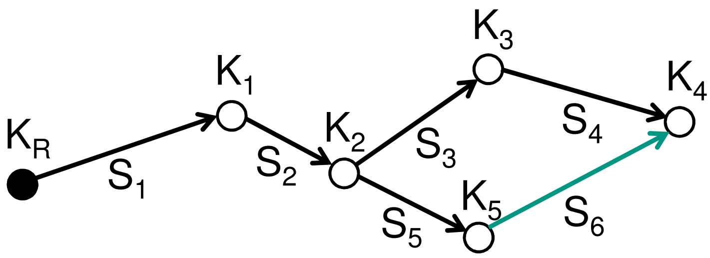
Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

  Der Graph eines vermaschten Netzes enthält eine/mehrere Maschen. Das dadurch nichtlineare Gleichungssystem des hydraulischen Gleichgewichts wird iterativ gelöst.

$$\mathbf{A}^T = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Spannbaum Sehne



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

  Für ein Rohrnetz mit m Knoten und l Maschen sind m Kontinuitätsgleichungen und l Kompatibilitätsgleichungen gültig.

$$h = R \cdot Q^e$$ Widerstandsgesetz

$$\sum_S^n Q_{S,K} - Q_{E,K} = 0$$ Kontinuitätsgleichung Anzahl: m

$$\sum_S^n h_{S,M} = 0$$ Kompatibilitätsbedingung Anzahl: l

Stationäre Rohrnetzberechnung

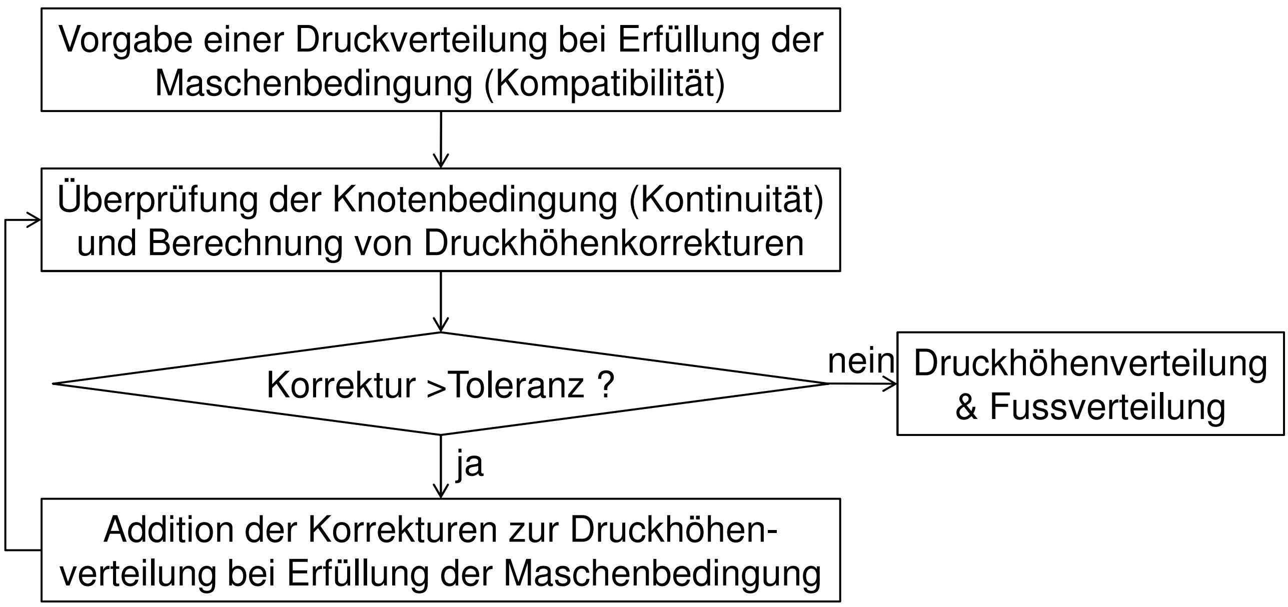
- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

  Es werden **knotenbezogene** und **maschenbezogene Verfahren** zur iterativen Lösung des hydraulischen Gleichgewichts unterschieden.

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

  Knotenbezogene Verfahren

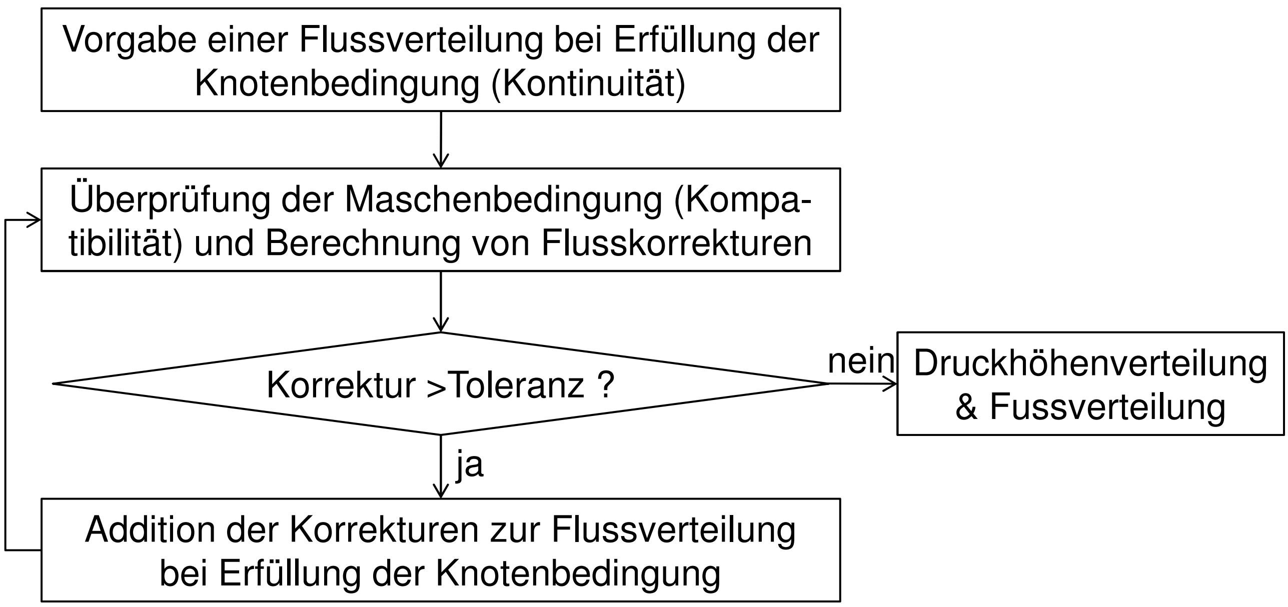


Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen
  Knotenbezogene Verfahren
  - Weitere Informationen in der Literatur, z.B. Bhave (1991)

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen
  Maschenbezogene Verfahren



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

Maschenbezogene Verfahren

Umformung der Maschenbedingung (Kompatibilität):

$$h = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \lambda \cdot \frac{L \cdot 8 \cdot Q^2}{D^5 \cdot g \cdot \pi^2} \quad ;Q = v \cdot A$$

$$h = a \cdot Q^2 = a \cdot Q \cdot |Q|$$; a_S... Widerstand des Rohrabschnitts S

$$\sum_S^n h_S = 0$$

$$\sum_S^n a_S \cdot Q_S |Q_S| = 0$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

Maschenbezogene Verfahren

Anzahl unabhängiger Gleichungen zur Berechnung der Flüsse Q_S:

$Q_s = ?$ → S unbekannte Flüsse (S... Anzahl Stränge)

$\sum_S^n a_S \cdot Q_S |Q_S| = 0$ → I unabhängige Gleichungen (I... Anzahl Maschen)

$\sum_S^n Q_S = 0$ → m-1 unabhängige Gleichungen (m... Anzahl Knoten)

- Identifizierung aller Maschen vorausgesetzt
- Potentialknoten werden durch virtuelle Maschen und einen virtuellen Referenzknoten berücksichtigt (> *02 Grundlagen der Modellierung*)
- Iterative Ermittlung des Druckhöhenverlusts h = f(Q)

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Berechnung von vermaschten Rohrnetzen

  Bei **sequenziellen Verfahren** wird jeder Knoten (bzw. Masche) separat betrachtet und das Ergebnis bei der Betrachtung des jeweils nächsten Knotens (bzw. Masche) berücksichtigt.

  Bei **simultanen Verfahren** werden die Knoten (bzw. Maschen) gemeinsam betrachtet und daher eine Konvergenz schneller erreicht.

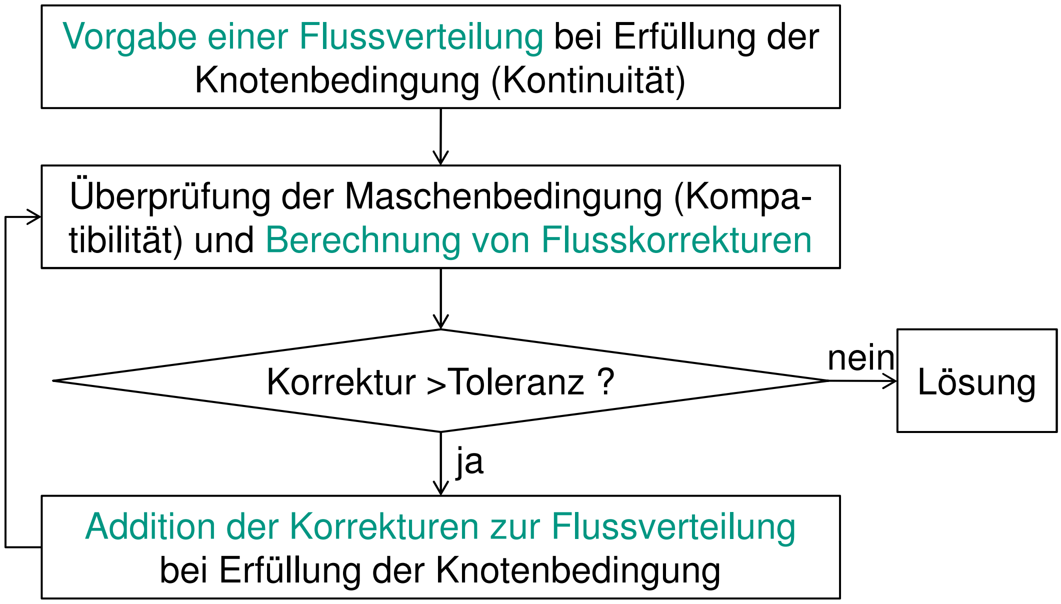
Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode
  - Verfahren nach Hardy Cross (1936)
  - Maschenbezogen
  - Sequenziell
  - Für Handrechnungen geeignet
  - Einfache Umsetzung in Programmen
  - Konvergenzeigenschaften sind schlechter als bei simultanen Verfahren
  - Eingeschränkte Möglichkeiten der Berücksichtigung von Kontrollarmaturen

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

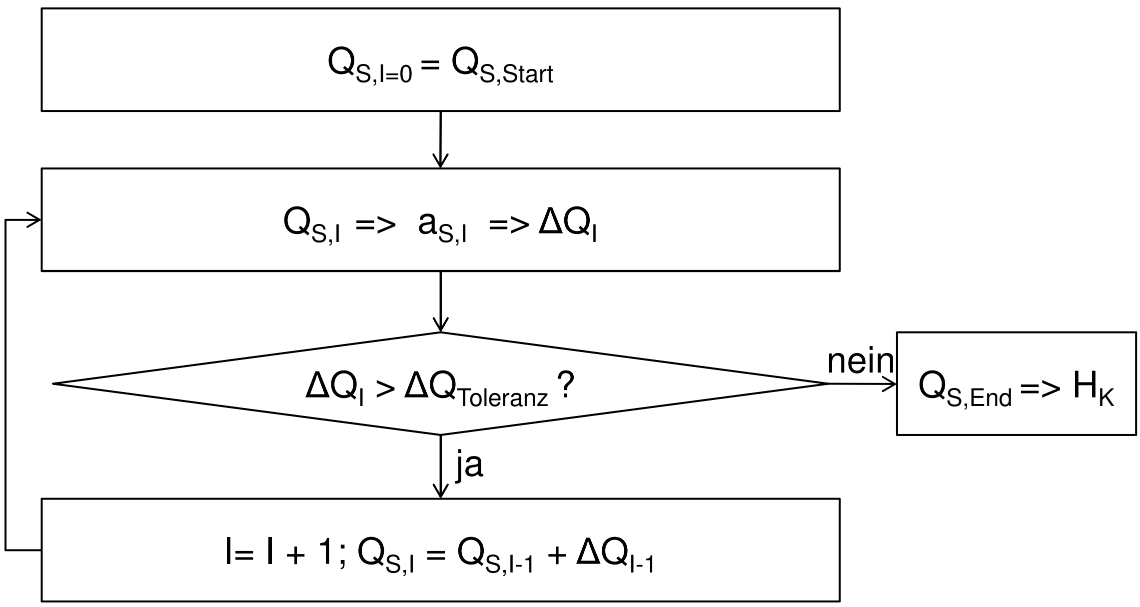
  Iterationsverfahren:



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

  Iterationsverfahren:



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

Korrekturglied ΔQ:

$$0 = \sum_{S}^{n} a_S \cdot Q_{neu}^2$$

$$0 = \sum_{S}^{n} a_S \cdot (Q_S + \Delta Q)^2$$; ausmultipliziert, $\Delta Q^2 \rightarrow 0$, Betrag für Flussrichtung

$$0 = \sum_{S}^{n} a_S \cdot Q_S |Q_S| + 2\sum_{S}^{n} a_S \cdot |Q_S| \Delta Q$$

$$\Delta Q = -\frac{\sum_{S}^{n} a_S \cdot Q_S |Q_S|}{2\sum_{S}^{n} a_S \cdot |Q_S|}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

Korrekturglied ΔQ:

$$0 = \sum_{S}^{n} a_S \cdot Q_{neu}^2$$

$$0 = \sum_{S}^{n} a_S \cdot (Q_S + \Delta Q)^2$$

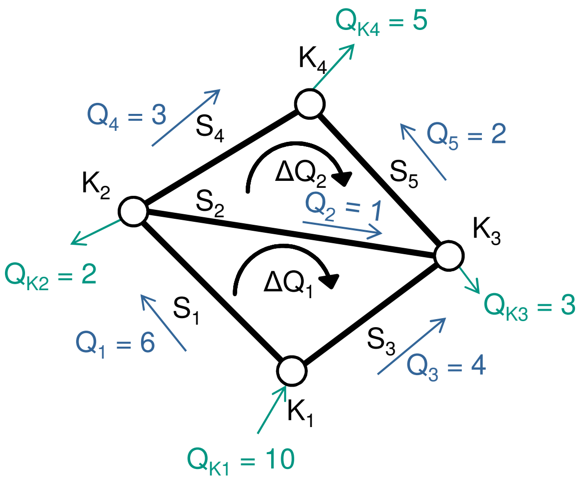
$$\Big\downarrow$$ Taylorreihe um Q_S; Reihe = 0,
$\Delta Q^2 \rightarrow 0$, Betrag für Flussrichtung

$$\Delta Q = -\frac{\sum_{S}^{n} a_S \cdot Q_S |Q_S|}{2\sum_{S}^{n} a_S \cdot |Q_S|}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

  Beispiel:



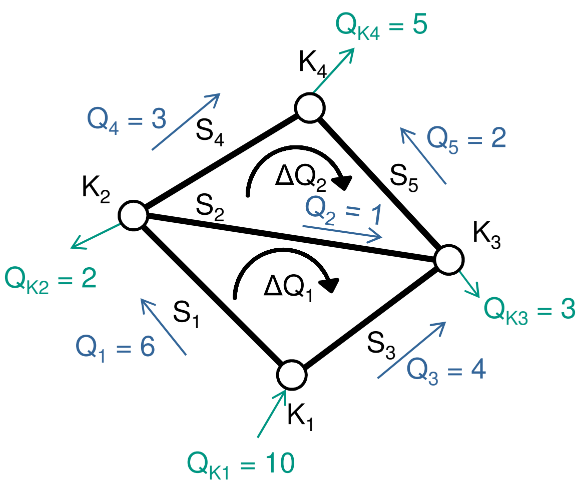
$$\Delta Q_1 = -\frac{a_1|Q_1|Q_1 + a_2|Q_2|Q_2 + (-)a_3|Q_3|Q_3}{2\left(a_1|Q_1| + a_2|Q_2| + a_3|Q_3|\right)}$$

$$\Delta Q_2 = -\frac{(-)a_2|Q_2|Q_2 + a_4|Q_4|Q_4 + (-)a_5|Q_5|Q_5}{2\left(a_2|Q_2| + a_4|Q_4| + a_4|Q_4|\right)}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

  Beispiel:



$$\left.\begin{aligned} Q_{1,I} &= Q_{1,I-1} + \Delta Q_1 \\ Q_{2,I} &= Q_{2,I-1} + \Delta Q_1 \\ Q_{3,I} &= Q_{3,I-1} + (-)\Delta Q_1 \end{aligned}\right\} \text{Masche 1}$$

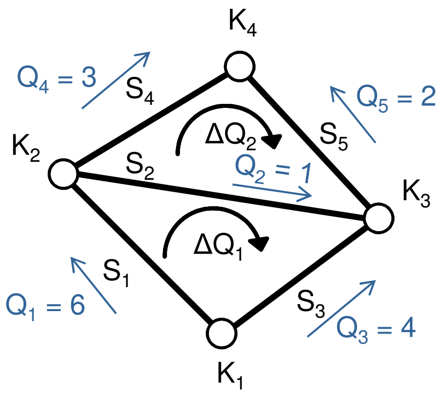
$$\left.\begin{aligned} Q_{2,I} &= Q_{2,I-1} + (-)\Delta Q_2 \\ Q_{4,I} &= Q_{4,I-1} + \Delta Q_2 \\ Q_{5,I} &= Q_{5,I-1} + (-)\Delta Q_2 \end{aligned}\right\} \text{Masche 2}$$

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

  Beispiel:

$$\Delta Q = -\frac{\sum_{S}^{n} a_S \cdot Q_S |Q_S|}{2\sum_{S}^{n} a_S \cdot |Q_S|}$$



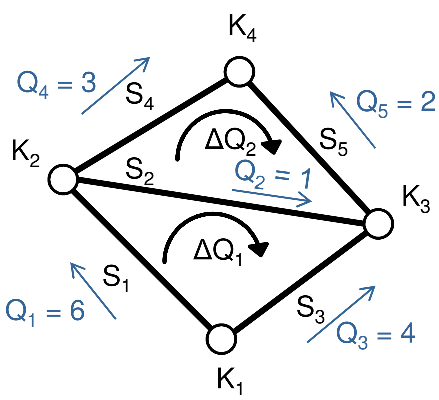
Iteration I = 1

M	S	Q_S	a_S	$2a_S\|Q_S\|$	$a_S\|Q_S\|Q_S$	ΔQ_S	$Q_{S\ I+1}$
M_1	S_1	6,0	0,40	4,80	14,40	-0,94	5,06
M_1	S_2	1,0	0,50	1,00	0,50	-0,94	0,06
M_1	S_3	4,0	0,40	3,20	(-)6,40	+0,94	4,94
				$\sum$ = 9,00	$\sum$ = 8,50		
M_2	S_4	3,0	0,40	2,40	3,60	-0,49	2,51
M_2	S_5	2,0	0,40	1,60	(-)1,60	+0,49	2,49
M_2	S_2	0,06	0,50	0,06	(-)0,002	+0,49	0,55
				$\sum$ = 4,06	$\sum$ = 2,00		

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

  Beispiel:



Iteration I = 2

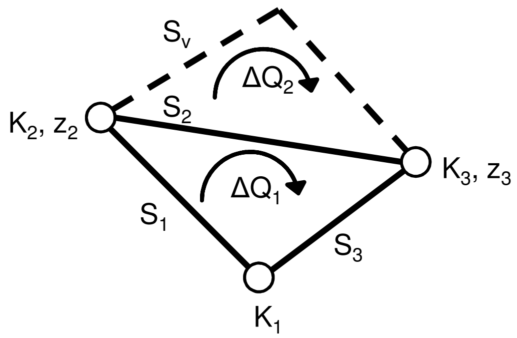
M	S	Q_S	a_S	$2a_S\|Q_S\|$	$a_S\|Q_S\|Q_S$	ΔQ_S	$Q_{S\ I+1}$
M_1	S_1	5,06					
M_1	S_2	0,55					
M_1	S_3	4,94					
				$\sum$ =	$\sum$ =		
M_2	S_4	2,51					
M_2	S_5	2,49					
M_2	S_2	0,55					
				$\sum$ =	$\sum$ =		

Stationäre Rohrnetzberechnung

- Hardy-Cross-Methode

  Berechnung mit mehreren Behältern:

  Berücksichtigung von Behältern durch virtuelle Verbindungen (virtuelle Maschen) mit der Verlusthöhe gleich der geodätischen Höhendifferenz für die Ermittlung von ΔQ.



Stationäre Rohrnetzberechnung

- Weitere Verfahren

  Zur Berechnung des hydraulischen Systemzustands sind weitere Verfahren bekannt. Einer besonderen Bedeutung kommt die Berücksichtigung von Kontrollarmaturen zu:
  - Newton-Methode
  - Linearisierung und Lösung mit Linearer Programmierung
  - Formulierung als Optimierungsaufgabe (z.B. Deuerlein, 2002)
  - Heuristische Verfahren (z.B. Gradienten Methode nach Todini und Pilati, 1987; implementiert in EPANET)

  - Weitere Informationen in der Literatur, z.B. Bhave (1991), Deuerlein (2002)

Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

- Ziel

  Bei der zeitabhängigen Rohrnetzberechnung werden die Durchflüsse und Druckhöhenverluste in den Strängen sowie die Druckhöhen an den Knoten unter Berücksichtigung der **zeitlichen Parameteränderungen** (z.B. Verbrauchsganglinien, Steuervorgaben) ermittelt.

Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

- Konstante Parameter
  - Netz (Leitungen, Armaturen, Pumpen, Behälter)
  - Wasserverbrauch (Basiswerte)
  - Wassereinspeisung (Basiswerte)
- Zeitabhängige Parameter
  - Ganglinien des Wasserverbrauchs
  - Ganglinien des Wassereinspeisung
  - Steuervorgaben

Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

- Variablen
  - Druckverteilung
  - Flussverteilung
  - Fließgeschwindigkeiten
  - Kontrollzustände der Armaturen

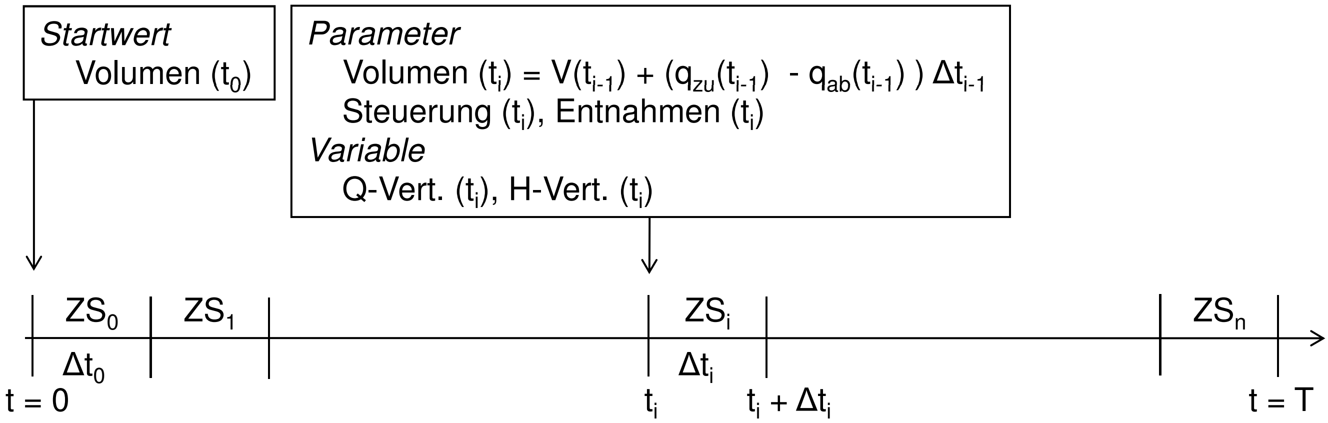
  - Füllstandänderungen
  - Ausbreitung und Konzentration
  - Verweilzeiten

Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

- Quasi-stationäre Berechnung
  - Vernachlässigung der Beschleunigungskräfte auf Grund der geringen Fließgeschwindigkeiten
  - Unterteilung des zu untersuchenden Simulationszeitraums in Zeitschritte
  - Diskretisierung der zeitlich veränderlichen Parameter
  - Berechnung der zeitlichen Änderung des hydraulischen System-zustands als Abfolge stationärer Berechnungen, bei der die Flüsse über die Zeitschrittdauer extrapoliert werden (auch als quasi-stationäre Berechnung bezeichnet)

Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

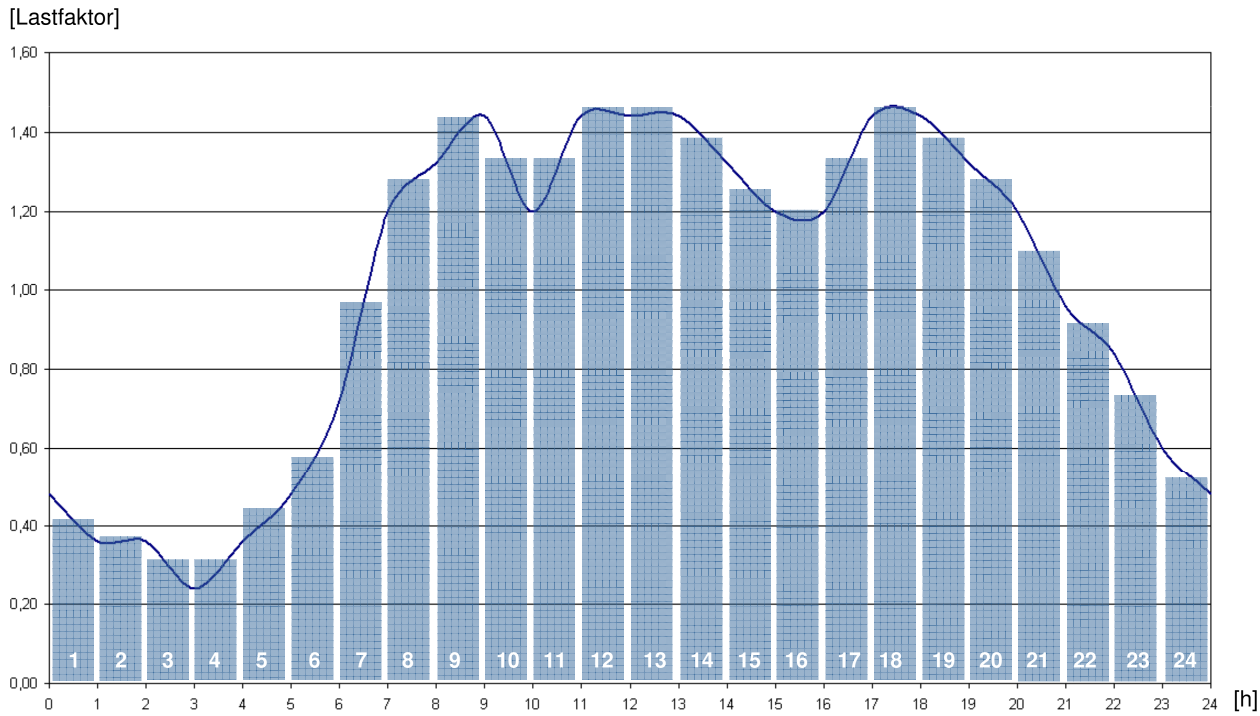
- Quasi-stationäre Berechnung



t... Zeit
T... Simulationszeitraum
ZS... Zeitschritt
Δt... Zeitschrittdauer, konstant
i... Zeitschritt-Nummer
n... Anzahl der Zeitschritte

Zeitabhängige Rohrnetzberechnung

- Diskretisierung – Beispiel Verbrauchsganglinie



Literatur

- Rohrhydraulik
  - Jirka, G. H. (2007): Einführung in die Hydromechanik, Institut für Hydromechanik.

    (Download: www.ifh.uni-karlsruhe.de)
  - Lang, C. und Stache, N. (2009): Hydraulik von Rohrsystemen, Institut für Hydromechanik.

    (Download: www.ifh.uni-karlsruhe.de)

Literatur

- Rohrnetzberechnung
  - Horlacher, H.-B. und Lüdecke, H.-J. (2006): Strömungsberechnung für Rohrsysteme, Expert-Verlag.

    (UB Karlsruhe: Lesesaal Technik, Fachgruppe masch 8.4, Signatur: 92 A 2436(2))
  - Bhave, P. R. (1991): Analysis of flow in water distribution networks, Technomic.

    (UB Karlsruhe: Lesesaal Technik, Fachgruppe bau 8.1, Signatur: 96 A 2693)
  - Deuerlein, J. (2002): Zur hydraulischen Systemanalyse von Wasserversorgungsnetzen, Institut für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik, Diss.

    (UB Karlsruhe: Lesesaal Technik, Magazin, Archiv, Fachgruppe bau 11, Signatur: 2002 DE 88)

Literatur

- Regelwerke der Deutschen Vereins des Gas- und Wasserfaches e.V. (DVGW)
  - DVGW Arbeitsblatt W 400-1 (2004): Technische Regeln Wasserverteilungsanlagen, Teil 1: Planung